

基于改进观测器的分数阶超混沌 Chen 系统广义同步

陈向荣^{1,2}, 刘崇新^{1,2}, 李永勋^{1,2}

(1. 西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安; 2. 西安交通大学电力设备电气绝缘国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 基于分数阶微积分的预估-校正算法, 研究了分数阶超混沌 Chen 系统, 并进行了数值仿真. 仿真结果表明, 分数阶超混沌 Chen 系统存在超混沌的最低阶数为 3.8 阶. 根据分数阶稳定性理论, 设计了一种改进的状态观测器, 利用解析的方法求得广义同步的响应系统, 从理论上证明了广义同步方法的可行性. 最后, 利用该同步方法实现了 3.8 阶超混沌 Chen 系统的广义同步, 数值仿真结果证实了它的有效性.

关键词: 分数阶超混沌 Chen 系统; 广义同步; 观测器

中图分类号: O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)02-0238-05

Generalized Synchronization of Fractional Order Hyperchaotic Chen System with Improved Observer

CHEN Xiangrong^{1,2}, LIU Chongxin^{1,2}, LI Yongxun^{1,2}

(1. School of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on fractional calculus predictor-corrector algorithm, the fractional-order hyperchaotic Chen system is investigated numerically, and the simulation results show that the lowest orders for hyperchaos in hyperchaotic Chen system gets 3.8. According to the stability theory of fractional-order system, an improved state-observer is designed, and the response system of generalized synchronization is obtained analytically, whose feasibility is proved theoretically. The synchronization method is adopted to realize the generalized synchronization of 3.8-order hyperchaotic Chen system, and the numerical simulation results verify the effectiveness.

Keywords: fractional order hyperchaotic Chen system; generalized synchronization; observer

分数阶微积分已有 300 多年的历史, 但分数阶微积分在物理和工程中的应用最近才引起人们的研究兴趣. 事实上, 许多系统都能呈现出分数阶动力学行为, 例如黏滞系统、电介质极化和电磁波等. 近年来, 分数阶混沌系统引起人们广泛的兴趣和深入的研究, 在 Chua's 电路^[1]、Chen 系统^[2]、Rössler 系统和超混沌 Rössler 系统^[3]中, 通过数值仿真发现, 当系统的阶数为分数时, 系统仍呈现混沌或超混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象.

1990 年, 美国海军实验室的 Pecora 和 Carroll^[4]提出了一种混沌同步方法, 并在电路实验中首次观察到混沌同步现象. 最近的研究结果表明, 在分

数阶系统中也能够实现同步. 2003 年, Li 等^[5]通过数值仿真第一次实现了分数阶混沌系统的同步, 这极大地激发了人们对分数阶混沌系统同步问题研究的兴趣, 提出了几种实现了分数阶混沌系统的同步方法^[6-7], 其中大多是两个参数相同的混沌系统的完全同步, 而在实际中难以产生两个完全相同的混沌系统. 1995 年, Rulkov 等^[8]推广了混沌同步的概念, 首次提出广义同步的观点. 所谓广义同步, 是指响应系统的状态变量与驱动系统的状态变量的函数同步, 所以完全同步可以看作是广义同步的特例.

本文首先根据分数阶微积分的预估-校正算法, 研究了分数阶超混沌 Chen 系统, 数值仿真结果表

明,分数阶超混沌 Chen 系统存在超混沌的最低阶数为 3.8 阶,并设计了一种改进的状态观测器,利用解析的方法求得广义同步的响应系统,从理论上证明了该方法的可行性.

1 分数阶微分及数值算法

分数阶微分的定义有好几种,常用的是 Riemann-Liouville(RL)定义,其数学表达式如下

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数; $n-1 \leq \alpha < n$, n 为整数.

目前,实施分数阶微积分运算的求解方法有多种,常用的方法主要有波特图近似方法^[9]和预估-校正方法^[10],下面简单介绍本文利用的预估-校正方法,即广义的 Adams-Bashforth-Moulton 方法,考虑如下微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt^\alpha} &= f(t, y(t)) \quad 0 \leq t \leq T \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)与下式

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3)$$

等价,取 $h = \frac{T}{N}$, $t_n = nh$, $n=0, 1, \dots, N \in \mathbb{Z}^+$, 式(3)

可离散化为

$$\begin{aligned} y_h(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \\ &\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} (f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \\ &\sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j))) \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - \\ 2(n-j+1)^{\alpha+1} & 1 \leq j \leq n \\ 1 & j=n+1 \end{cases}$$

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j))$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha)$$

式(3)与式(4)的误差为 $\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p)$, 其中 $p = \min(2, 1+\alpha)$.

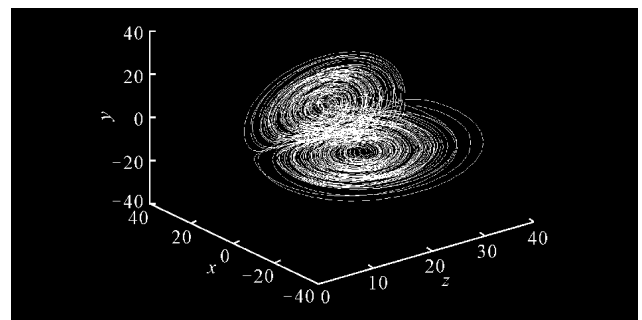
2 分数阶超混沌 Chen 系统

2005 年, Li 等^[11]提出了一种新的超混沌系

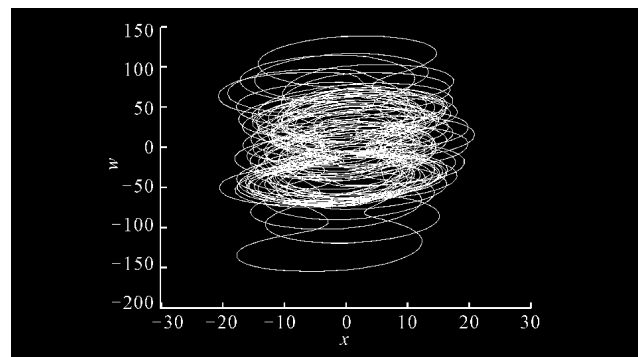
统——超混沌 Chen 系统,其分数阶方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y-x) + w \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= dx - xz + cy \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - bz \\ \frac{d^q w}{dt^q} &= yz + rw \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: q 为分数阶的阶数,且 $0 < q \leq 1$; a, b, c, d, r 为系统参数. 当 $q=1$, 参数 $a=35, b=3, c=12, d=7, r=0.5$ 时, 系统为整数阶超混沌系统, 利用四阶 Runge-Kutta 法, 得到其相图, 如图 1 所示.



(a) $z-x-y$



(b) $x-w$

图1 整数阶超混沌 Chen 吸引子

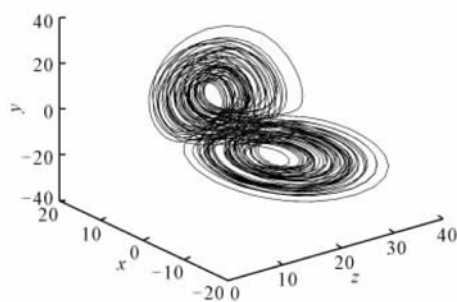
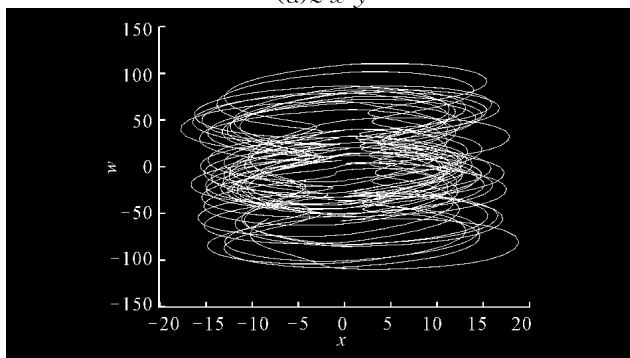
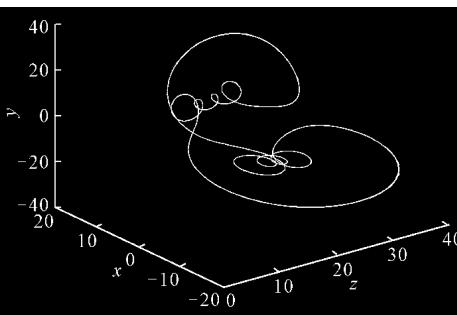
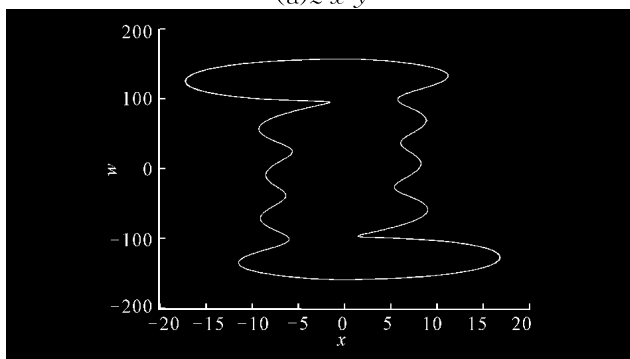
利用预估-校正方法,当 q 为 0.99~0.94 时,步长为 0.01,进行数值仿真发现,当 q 为 0.99~0.95 时,系统仍呈现超混沌状态.图 2 为 $q=0.95$ 时的相图,当 $q=0.94$ 时,系统为周期态,其相图如图 3 所示.

3 分数阶超混沌 Chen 系统的同步

3.1 同步控制原理

将广义同步的定义推广,考虑以下两个不同的系统

$$\frac{d^\alpha \mathbf{X}}{dt^\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (6a)$$

(a) $z-x-y$ (b) $x-w$ 图2 分数阶超混沌 Chen 吸引子($q=0.95$)(a) $z-x-y$ (b) $x-w$ 图3 分数阶超混沌 Chen 吸引子($q=0.94$)

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (6b)$$

式中: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ 为非线性函数的 n 维向量; $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T$ 为非线性函数的 m 维向量; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$; $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in R^m$; $\frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} = \left(\frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}}, \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}}, \dots, \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} \right)^T$; $\frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} =$

$\left(\frac{d^{\alpha_1} y_1}{dt^{\alpha_1}}, \frac{d^{\alpha_2} y_2}{dt^{\alpha_2}}, \dots, \frac{d^{\alpha_m} y_m}{dt^{\alpha_m}} \right)^T, \alpha_i \in R^+$. 式(6a)为驱动系统, 式(6b)为响应系统. 如果响应系统的输出 $\mathbf{Y}(t)$ 由驱动信号 $\mathbf{X}(t)$ 唯一确定, 即满足 $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})$, 则称这两个分数阶系统实现了广义同步.

由状态观测器理论, 设驱动系统(6a)为

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{C} \quad (7)$$

式中: $0 < \alpha \leq 1$; $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$; $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$; $\mathbf{C} \in R^n$, $\mathbf{C}$ 为常数; $\mathbf{F}: R^n \rightarrow R^m (m \leq n)$ 为非线性映射; $\mathbf{A} \mathbf{X}$ 为线性部分; $\mathbf{B} \mathbf{F}(\mathbf{X})$ 为非线性部分. 令式(7)的输出为

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{K} \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (8)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为待定常向量.

定理1 设响应系统(6b)的输出

$$\mathbf{s}(\mathbf{Y}) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{P} \mathbf{Y} \quad (9)$$

式中: $\mathbf{P} \in R^{n \times n}$, 且 $\mathbf{P}$ 为满秩. 如果 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 可控, 且 $|\arg(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}))| > \frac{\alpha \pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n$, 则当响应系统(6b)满足

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Y} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{W}(\mathbf{X}) - \mathbf{s}(\mathbf{Y})) \quad (10)$$

由式(6)构成的驱动-响应系统满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{P} \mathbf{Y} - \mathbf{X}\| = 0 \quad (11)$$

从而实现了广义同步.

证明 设 $\mathbf{e} = \mathbf{P} \mathbf{Y} - \mathbf{X}$, 根据分数阶微分性质, 由式(7)、式(10)得

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha} \mathbf{e}}{dt^{\alpha}} &= \mathbf{P} \frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} - \frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Y} + \mathbf{C} + \mathbf{B}(\mathbf{W}(\mathbf{X}) - \mathbf{s}(\mathbf{Y})) - \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (12)$$

将式(8)、式(9)代入式(12), 有

$$\frac{d^{\alpha} \mathbf{e}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{A} \mathbf{e} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{e} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{e} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$ 为时不变矩阵. 根据分数阶线性系统的稳定性理论^[12]可知, $|\arg(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}))| > \frac{\alpha \pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{P} \mathbf{Y} - \mathbf{X}\| = 0$, 证毕.

由式(13)可知, 根据控制理论中的零极点配置方法, 适当选取常数 $\mathbf{K}$, 使得 $|\arg(\lambda_i(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}))| > \frac{\alpha \pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n$, 则有 $\mathbf{e} \rightarrow 0$, 从而实现两个分数阶系统的广义同步. 式(10)为式(7)改进的状态观测器.

3.2 数值仿真

将式(5)写成式(7)的形式,有

$$\begin{aligned} \frac{d^q \mathbf{X}}{dt^q} = & \mathbf{A}\mathbf{X} + x_1 x_3 (0, -1, 0, 0)^T + \\ & x_1 x_2 (0, 0, 1, 0)^T + x_2 x_3 (0, 0, 0, 1)^T \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 1 \\ 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix}; \mathbf{W}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^4 k_i x_i$$

可见 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 可控, 令 $\lambda_i (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = [-2, -1, -2, -1]$, $i=1, 2, 3, 4$, 并设 $\mathbf{P} = \text{diag}[-2, -1, 1, 1]$, 根据定理 1, 利用极点配置方法可知, 存在一个常向量

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -39.031 & 19.972 & 3 & 0 & 0.970 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0.915 & 2 & -0.970 & 6 & 0 & 2.472 & 3 \end{bmatrix}$$

使得系统(10)成为系统(14)的一个改进的观测器, 任取初值 $\mathbf{X}(0)=[2, 3, 1.5, 1.2]$, $\mathbf{Y}(0)=[2.1, 3.2, 1.2, 1.2]$, 对 3.8 阶超混沌 Chen 系统进行数值仿真, 得到的结果如图 4 所示。

利用辅助系统的方法来进行进一步验证分数阶超混沌 Chen 系统的广义同步, 复制一个与响应系统(10)完全相同的辅助系统, 有

$$\frac{d^q \mathbf{Z}}{dt^q} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Z} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{W}(\mathbf{X}) - \mathbf{s}(\mathbf{Z})) \quad (15)$$

则 $\mathbf{Y}(t)$ 与 $\mathbf{X}(t)$ 实现稳定广义同步的充要条件为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Y}(t)\| = 0$, 设同步误差 $r = ((z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_3 - y_3)^2 + (z_4 - y_4)^2)^{1/2}$, 选取初值 $\mathbf{Z}(0)=[2, 3, 1, 1]$, 同步误差如图 5 所示, 可见系统(10)与系统(15)达到了完全同步。

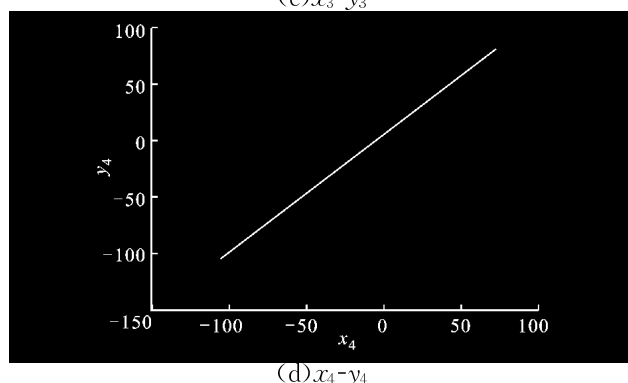
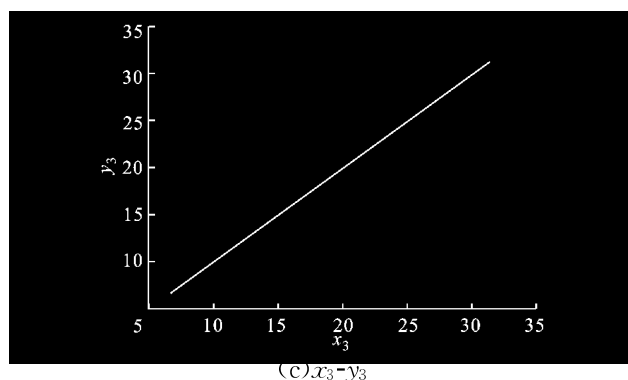
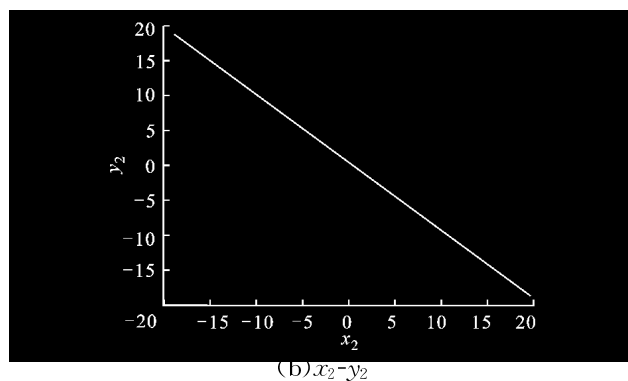
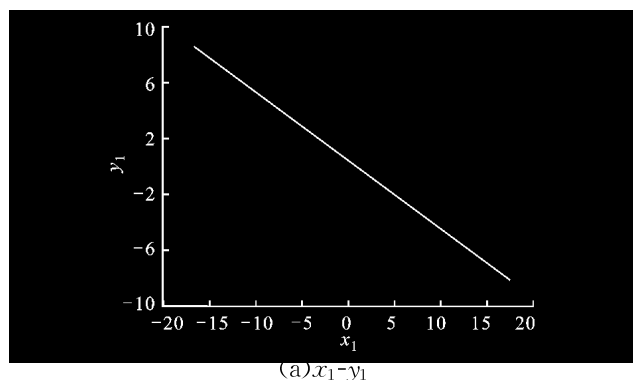
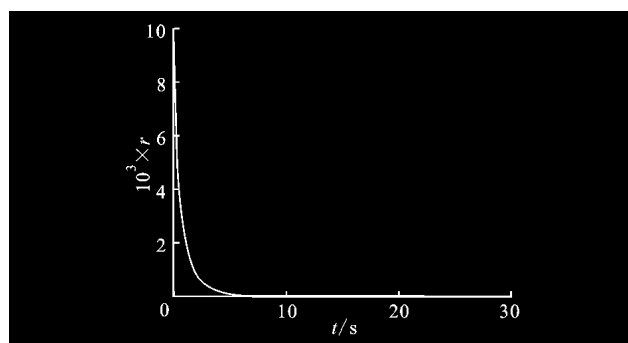


图 4 广义同步相图($q=0.95$)



4 结 论

本文基于分数阶微积分的预估-校正算法, 研究了分数阶超混沌 Chen 系统, 数值仿真结果表明, 分数阶超混沌 Chen 系统存在超混沌的最低阶数为

3.8阶.根据分数阶稳定性理论,设计了一种改进的状态观测器,采用解析的方法求得广义同步的响应系统,从理论上证明了该方法的可行性.利用该方法实现了超混沌 Chen 系统的广义同步,数值仿真结果证实了该方法的有效性.另外,该同步方法无需计算系统同步时的条件 Lyapunov 指数,简单可靠,易于工程应用.

参考文献:

- [1] HARTLY T T, LORENZO C F, QAMMER H K. Chaos in a fractional order Chua's system [J]. IEEE Trans CAS, 1995, 42(8): 485-490.
- [2] LU Junguo, CHEN Guanrong. A note on the fractional-order Chen system [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27(3): 685-688.
- [3] LI Chunguang, CHEN Guanrong. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations [J]. Physica: A, 2004, 341(1): 55-61.
- [4] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [5] LI Chunguang, LIAO Xiaofeng, YU Juebang. Synchronization of fractional order chaotic system [J]. Phys Rev: E, 2003, 68(6): 1-3.
- [6] LU Junguo. Synchronization of a class of fractional-order chaotic system via a scalar transmitted signal [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27(2): 519-525.
- [7] 逮俊杰,刘崇新,张作鹏,等.基于状态观测器的分数阶统一混沌系统的同步控制 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(4): 497-500.
LU Junjie, LIU Chongxin, ZHANG Zuopeng, et al. State-observer based synchronization control between fractional-order unified chaotic systems [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(4): 497-500.
- [8] RULKOV N F, SUSHCHIK M M, TSIMRING L S, et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic system [J]. Phys Rev: E, 1995, 51(2): 980-995.
- [9] CHAREL A, SUN H H, TSAO Y Y, et al. Fractal system as represented by singularity function [J]. IEEE Trans Auto Contr, 1992, 37(9): 1465-1470.
- [10] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations [J]. Nonlinear Dyn, 2002, 29(1): 3-22.
- [11] LI Yuxia, TANG W K S, CHEN Guanrong. Generating hyperchaos via state feedback control [J]. Int J Bifurc Chaos, 2005, 15(10): 3367-3375.
- [12] MATIGNON D. Stability results of fractional differential equations with applications to control processing [M]. Lille, France: IMACS, IEEE-SMC, 1996: 963-968.

(编辑 杜秀杰)